

کد کنترل

473

F



473F

آزمون (نیمه متمرکز) ورود به دوره‌های دکتری - سال ۱۴۰۲

دفترچه شماره (۱)

صبح پنجشنبه

۱۴۰۱/۱۲/۱۱



جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.»
امام خمینی (ره)

ریاضی (کد ۲۲۳۳)

زمان پاسخ‌گویی: ۱۳۵ دقیقه

تعداد سؤال: ۷۵

عنوان مواد امتحانی

رشته	گرایش	زمینه	دروس کارشناسی								ارشد دروس کارشناسی		
			مبانی ریاضی علوم ریاضی	مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی	مبانی آنالیز ریاضی	مبانی آنالیز عددی	مبانی جبر	توبولوژی	مبانی احتمال	آنالیز حقیقی ۱		جبر پیشرفته ۱	پهینه‌سازی خطی پیشرفته ۱
ریاضی	-	محض	✓	✓	✓	-	✓	✓	✓	✓	-	-	-
آموزش ریاضی*	-	کاربردی	✓	✓	✓	✓	-	-	✓	✓	✓	-	✓

- متقاضیان رشته ریاضی، زمینه محض می‌بایستی به دروس (مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی جبر، توبولوژی، آنالیز حقیقی ۱ و جبر پیشرفته ۱) پاسخ دهند.
- متقاضیان رشته ریاضی، زمینه کاربردی می‌بایستی به دروس (مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی آنالیز عددی، مبانی احتمال، آنالیز حقیقی ۱ و پهینه‌سازی خطی پیشرفته ۱) پاسخ دهند.
- متقاضیان رشته ریاضی، زمینه آموزش ریاضی می‌بایستی به دروس (مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی آنالیز عددی، مبانی احتمال، آنالیز حقیقی ۱ و اصول آموزش ریاضی) پاسخ دهند.

این آزمون نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

* داوطلب گرامی، عدم درج مشخصات و امضا در مندرجات جدول زیر، به منزله عدم حضور شما در جلسه آزمون است.

اینجانب با شماره داوطلبی با آگاهی کامل، یکسان بودن شماره سندلی خود با شماره داوطلبی مندرج در بالای کارت ورود به جلسه، بالای پاسخنامه و دفترچه سؤالات، نوع و کد کنترل درج شده بر روی جلد دفترچه سؤالات و پایین پاسخنامه را تأیید می‌نمایم.

امضا:

مبانی علوم ریاضی:

۱- دنباله توابع $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $C(n, x)$ به معنی پیوستگی f_n در x و

$D(n, x)$ به معنی مشتق پذیری f_n در x باشد. کدام گزینه ترجمه گزاره زیر به زبان منطق است؟

اگر بعضی از f_n ها بر $[0, 1]$ پیوسته باشند ولی هیچ کدام آنها در هیچ نقطه‌ای از $[0, 1]$ مشتق پذیر نباشند آنگاه تابعی پیوسته بر $[0, 1]$ وجود دارد که در هیچ نقطه‌ای مشتق پذیر نیست.

(n را مقید به اعداد طبیعی و x را مقید به بازه $[0, 1]$ می‌گیریم و \sim نماد نقیض است.)

$$(1) (\forall n \exists x C(n, x)) \wedge (\exists n \exists x D(n, x)) \Rightarrow \exists n \exists x (C(n, x) \Rightarrow \sim D(n, x))$$

$$(2) (\exists n \exists x C(n, x)) \wedge (\forall n \forall x \sim D(n, x)) \Rightarrow \exists n \exists x (C(n, x) \wedge \sim D(n, x))$$

$$(3) (\exists n \forall x C(n, x)) \wedge (\exists n \exists x D(n, x)) \Rightarrow \exists n \forall x (C(n, x) \Rightarrow \sim D(n, x))$$

$$(4) (\exists n \forall x C(n, x)) \wedge (\forall n \forall x \sim D(n, x)) \Rightarrow \exists n \forall x (C(n, x) \wedge \sim D(n, x))$$

۲- فرض کنیم $\{A_i\}_{i \in I}$ ، $\{B_j\}_{j \in J}$ و $\{C_k\}_{k \in K}$ سه خانواده از مجموعه‌های ناتهی باشند که

$$\forall k \in K \forall j \in J (B_j \subseteq C_k) \text{ و } \forall i \in I \exists j \in J (B_j \subseteq A_i)$$

کدام گزینه درست است؟

$$(1) \bigcup_{j \in J} B_j \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i \text{ و } \bigcup_{j \in J} B_j \subseteq \bigcap_{k \in K} C_k$$

$$(2) \bigcap_{j \in J} B_j \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i \text{ و } \bigcup_{j \in J} B_j \subseteq \bigcap_{k \in K} C_k$$

$$(3) \bigcup_{j \in J} B_j \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i \text{ و } \bigcup_{j \in J} B_j \not\subseteq \bigcap_{k \in K} C_k$$

$$(4) \bigcap_{j \in J} B_j \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i \text{ و } \bigcup_{j \in J} B_j \not\subseteq \bigcap_{k \in K} C_k$$

۳- رابطه R را روی $C[0, 1]$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f(x) \leq g(x) \text{ بر } [0, 1] \text{ ، } f, g \in C[0, 1] \text{ هرگاه هرگاه تقریباً همه جا بر } [0, 1] \text{ ، } f(x) \leq g(x)$$

کدام گزینه درباره رابطه R درست است؟

(۱) هم‌ارزی است.

(۲) ترتیب کلی است.

(۳) ترتیب جزئی است ولی ترتیب کلی نیست.

(۴) پادتقارنی است ولی متعدی نیست.

۴- فرض کنید $X = \{x \in A : x < 0 \vee x^2 \leq \pi\}$ و $Y = \{x \in A : 0 < x \wedge \pi < x^2\}$ ، که در آن A مجموعه اعداد جبری است. کدام گزینه نادرست است؟

(۱) $X \cup Y = A$

(۲) مجموعه X زیرینه (سوپریمم) دارد ولی بیشینه (ماکسیمم) ندارد.

(۳) مجموعه Y زیرینه (اینفیمم) دارد ولی زیرینه (سوپریمم) ندارد.

(۴) مجموعه X بیشینه (ماکسیمم) دارد ولی زیرینه (اینفیمم) ندارد.

۵- فرض کنید α و β اعداد اصلی باشند. کدام گزینه نادرست است؟

(۱) اگر اعداد اصلی α و β متناهی نباشند و $\alpha < \beta$ آنگاه به ازای هر عدد اصلی γ ، $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$.

(۲) اگر $\alpha \leq \beta$ آنگاه به ازای هر عدد اصلی γ ، $\alpha^\gamma \leq \beta^\gamma$.

(۳) اگر $\alpha\beta = 0$ آنگاه $\alpha = 0$ یا $\beta = 0$.

(۴) اگر $\alpha\beta = 1$ آنگاه $\alpha = 1$ و $\beta = 1$.

مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی:

۶- فرض کنید $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ تبدیل خطی با ضابطه

$$T(x, y, z) = (x + y + z, x + 2y - 3z, 2x + 3y - 2z, 3x + 4y - z)$$

T ، کدام است؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

۷- فرض کنید A یک ماتریس 7×7 پادمتقارن ($A^T = -A$) با درایه‌های حقیقی باشد. اگر I_7 ماتریس همانی

باشد، آنگاه رتبه $I_7 + A$ ، کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۶

(۳) ۵

(۴) ۷

۸- فرض کنید A و B دو ماتریس 5×5 متمایز با درایه‌های حقیقی باشند به طوری که مجموع درایه‌های روی هر سطر

برابر با ۲ است. در این صورت $\det(AB - BA)$ ، کدام است؟

(۱) -۱

(۲) صفر

(۳) ۱

(۴) ۲

۹- فرض کنید عملگر خطی T روی \mathbb{R}^3 ، به صورت $T(x, y, z) = (2y + z, x - 4y, 3x)$ تعریف شده است. نمایش ماتریسی T نسبت به پایه $\alpha_1 = (1, 1, 1)$ ، $\alpha_2 = (1, 1, 0)$ ، $\alpha_3 = (1, 0, 0)$ کدام است؟

$$\begin{matrix} (1) & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ (2) & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ (3) & \begin{bmatrix} 3 & 6 & -6 \\ -3 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \\ (4) & \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -6 & -6 & -2 \\ 6 & 5 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

۱۰- فرض کنید A یک ماتریس 3×3 با درایه‌های مختلط اثر ۲ باشد ($\text{tr}(A) = 2$). اگر A دارای یک مقدار ویژه ۷ با

بردارهای ویژه متناظر $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ باشد، آنگاه دترمینان A ، کدام است؟

- (۱) -۵۸۸
(۲) -۳۴۳
(۳) ۳۴۳
(۴) ۵۸۸

مبانی آنالیز ریاضی:

۱۱- برای تابع پیوسته $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ کدام گزینه نتیجه نمی‌دهد که $f = 0$ ؟

(۱) برای هر $n \in \mathbb{Z}$ ، $\int_0^1 |f(t+n)| dt = 0$

(۲) برای هر $r \in \mathbb{Q}$ ، $\int_0^r f(t) dt = 0$

(۳) برای هر $x \in \mathbb{R}$ ، $\int_0^1 f(xt) dt = 0$

(۴) برای هر $x \in \mathbb{R}$ ، $\int_0^1 f(x+t) dt = 0$

۱۲- کدام گزینه درست است؟

(۱) تابع پیوسته و پوشای $f: (0, 1) \rightarrow [0, 1]$ وجود ندارد.

(۲) تابع پیوسته و دوسویی $f: (0, 1) \rightarrow [0, 1]$ وجود ندارد.

(۳) تابع پیوسته و یک به یک $f: [0, 1] \rightarrow (0, 1)$ وجود ندارد.

(۴) یک تابع پیوسته و پوشای $f: [0, 1] \rightarrow (0, 1)$ وجود دارد.

$$-۱۳ \quad \text{تابع } f \text{ را بر } \mathbb{R} \text{ با ضابطه } f(x) = \begin{cases} x^2 \sin^2 \frac{\pi}{2x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \text{ تعریف می کنیم. کدام گزینه نادرست است؟}$$

(۱) تابع f بر \mathbb{R} یکنواخت پیوسته است.

(۲) تابع f بر زیرمجموعه‌های فشرده \mathbb{R} یکنواخت پیوسته است.

(۳) تابع f بر \mathbb{R} مشتق پذیر است ولی مشتق آن در صفر پیوسته نیست.

(۴) تابع f بر \mathbb{R} پیوسته است ولی پیوستگی آن یکنواخت نیست.

$$-۱۴ \quad \text{کدام گزینه در مورد دنباله } \{n!e - [n!e]\} \text{ درست است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)}$$

(۱) همگرا به صفر است.

(۲) همگرا به ۱ است.

(۳) همگرا به $\frac{1}{e}$ است.

(۴) واگرا است.

$$-۱۵ \quad \text{فرض کنید } \{x_n\} \text{ دنباله‌ای کران دار از اعداد حقیقی باشد. کدام گزینه برابر با } \liminf x_n \text{ نیست؟}$$

$$(۱) \inf_{k=1}^{\infty} \overline{\{x_n : n \geq k\}}$$

$$(۲) \sup \{ \alpha \in \mathbb{R} : \text{متناهی است } \{n \in \mathbb{N} : x_n < \alpha\} \}$$

$$(۳) \left(\inf \{x_n : n \in \mathbb{N}\}' \right) \text{ به شرط آنکه } \{x_n : n \in \mathbb{N}\}' \neq \emptyset$$

$$(۴) \inf \{ \alpha \in \mathbb{R} : \text{نامتناهی است } \{n \in \mathbb{N} : x_n < \alpha\} \}$$

مبانی آنالیز عددی:

$$-۱۶ \quad \text{در یک دستگاه ممیز شناور برای نمایش اعداد حقیقی در مبنا ۹ با ۲ رقم مانتیس و روش گرد کردن، فاصله بین}$$

۸ و نزدیک ترین عدد قابل نمایش بزرگ تر از ۸، کدام است؟

$$(۱) \frac{1}{8}$$

$$(۲) \frac{1}{9}$$

$$(۳) \frac{1}{81}$$

$$(۴) \frac{1}{64}$$

$$-۱۷ \quad \text{تجزیه چولسکی ماتریس معین مثبت } A \text{ به صورت } A = LL^T \text{ که در آن، } L \text{ یک ماتریس پایین مثلثی است،}$$

تعریف می شود. کدام مورد برای تجزیه چولسکی درست است؟

(۱) یکتا است.

(۲) اگر در فرایند تجزیه، محورگزینی سطری صورت نگیرد، ناپایدار است.

(۳) یکتا است اگر و تنها اگر در فرایند تجزیه محورگزینی سطری صورت گیرد.

(۴) یکتا است اگر همه عناصر قطری ماتریس L اعدادی مثبت باشند.

۱۸- می‌خواهیم تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در بازه $[1, 2]$ به وسیله تکه‌های خطی درون‌یاب روی زیربازه‌هایی با طول یکسان،

تقریب بزنیم. تعداد تکه‌ها دست کم چند باشد تا خطای درون‌یابی در سرتاسر بازه نایبتر از 0.25×10^{-4} باشد؟

(۱) ۲۵

(۲) ۵۰

(۳) ۱۰۰

(۴) ۲۰۰

۱۹- کدام گزینه در مورد جواب مسئله $\min_x \|Ax - b\|_p$ درست است؟

(۱) جواب یکتا دارد اگر و تنها اگر ستون‌های A مستقل خطی باشند.(۲) جواب یکتا دارد اگر و تنها اگر b در برد A قرار داشته باشد.(۳) بی‌نهایت جواب دارد اگر x موجود نباشد به طوری که $Ax = b$.

(۴) می‌تواند جواب نداشته باشد.

۲۰- مرتبه همگرایی مجانبی رابطه تکراری $x_{k+1} = \cos x_k - 1$ به نقطه ثابت صفر، کدام است؟

(۱) خطی

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) $\sqrt{2}$ میانی جبر:

۲۱- در گروه \mathbb{Z}_{30} زیرگروه $\langle 3 \rangle = H$ را در نظر می‌گیریم. کدام گزینه مولدی برای H نیست؟

(۱) ۹

(۲) ۱۵

(۳) ۲۱

(۴) ۲۷

۲۲- فرض کنید G گروه دوری از مرتبه ۴۸ باشد و نگاشت $\varphi: G \rightarrow G$ با ضابطه $\varphi(g) = g^3$ را در نظر بگیرید.

در این صورت کدام مورد صحیح است؟

(۱) $|\ker \varphi| = 3$ (۲) $|\ker \varphi| = 16$ (۳) $|\operatorname{Im} \varphi| = 48$ (۴) $|\operatorname{Im} \varphi| = 3|\ker \varphi|$

۲۳- در گروه S_8 فرض کنید زیرگروه H توسط دو جایگشت زیر تولید شده است:

$$g = (7 \ 8), f = (1 \ 2 \ 3)(4 \ 5 \ 6)$$

در این صورت H با کدام گزینه یکرخت است؟(۲) \mathbb{Z}_6 (۱) S_3 (۴) $S_3 \times \mathbb{Z}_2$ (۳) $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$

۲۴- گروه G متشکل از ماتریس‌های 2×2 به صورت $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid ad - bc \neq 0, a, b, c, d \in \mathbb{Z}_5 \right\}$ در نظر

بگیرید. مرتبه گروه G برابر است با:

(۱) ۲۵

(۲) ۴۸۰

(۳) ۱۲۵

(۴) ۶۲۵

۲۵- تعداد ایده‌آل‌های اول حلقه $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ که ماکسیمال نیستند برابر است با:

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

توپولوژی:

۲۶- فرض کنید (X, τ) یک فضای توپولوژیک باشد و $A \subseteq X$. از کدام خاصیت نمی‌توان نتیجه گرفت که مرز A هیچ‌جا چگال است؟

(۱) A باز باشد.

(۲) A همبند باشد.

(۳) A بسته باشد.

(۴) A هیچ‌جا چگال باشد.

۲۷- توپولوژی زیر را روی \mathbb{R} در نظر بگیرید.

$$\tau = \{E \subseteq \mathbb{R} \mid \text{حداکثر شمارا است } E^c\} \cup \{\emptyset\}$$

کدام گزینه درباره بازه $[0, 1]$ در فضای توپولوژیک (\mathbb{R}, τ) درست است؟

(۱) چگال است ولی فشرده نیست.

(۲) چگال نیست ولی فشرده است.

(۳) چگال است و فشرده است.

(۴) چگال نیست و فشرده نیست.

۲۸- فرض کنید (X, τ) یک فضای توپولوژیک هاسدورف و فشرده باشد و $E \subseteq X$. کدام گزینه نادرست است؟

(۱) اگر \bar{E} در E باز باشد، آنگاه E موضعاً فشرده است.

(۲) اگر E موضعاً فشرده باشد، آنگاه E در \bar{E} باز است.

(۳) اگر $\bar{E} = X$ و E موضعاً فشرده باشد، آنگاه E^c در X هیچ‌جا چگال است.

(۴) اگر $\bar{E} = X$ و E شمارای دوم باشد، آنگاه E موضعاً فشرده است.

۲۹- فرض کنید X یک فضای توپولوژیک هاسدورف باشد و برای تابع $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ، $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$. کدام گزینه نادرست است؟

(۱) اگر $G(f)$ در $X \times \mathbb{R}$ فشرده باشد، آنگاه f پیوسته است.

(۲) اگر f پیوسته باشد، آنگاه $G(f)$ در $X \times \mathbb{R}$ بسته است.

(۳) اگر $X = \mathbb{R}$ و $G(f)$ در \mathbb{R}^2 بسته باشد، آنگاه f پیوسته است.

(۴) اگر f پیوسته و X فشرده باشد، آنگاه $G(f)$ در $X \times \mathbb{R}$ فشرده است.

۳۰- کدام گزینه درست است؟

- (۱) هر فضای جدایی پذیر، لیندلف است.
 (۲) هر زیر فضای یک فضای لیندلف، لیندلف است.
 (۳) حاصل ضرب هر دو فضای لیندلف، لیندلف است.
 (۴) تصویر پیوسته هر فضای لیندلف، لیندلف است.

مبانی احتمال:

۳۱- دو تاس سالم را یکبار پرتاب می‌کنیم. اگر A نمایانگر پیشامد مجموع دو خال برابر ۷ و B نمایانگر پیشامد خال اول فرد باشد، مقدار $P(A \cap B | A \cup B)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$
 (۲) $\frac{4}{5}$
 (۳) $\frac{5}{6}$
 (۴) $\frac{6}{7}$

۳۲- در بسط $(x+y+z+u)^5$ ، ضریب x^2z^2u کدام است؟

- (۱) ۱۰
 (۲) ۲۰
 (۳) ۳۰
 (۴) ۶۰

۳۳- جعبه‌ای شامل ۳ مهره سفید و ۴ مهره آبی است. یک مهره به تصادف از این جعبه انتخاب می‌شود. اگر مهره سفید بود، مهره انتخابی همراه با یک مهره آبی به جعبه برگردانده می‌شود و اگر مهره آبی بوده مهره انتخابی همراه با یک مهره سفید به جعبه برگردانده می‌شود. آن‌گاه مهره دوم به تصادف انتخاب می‌شود. اگر مهر دوم انتخابی آبی باشد، احتمال این که اولی هم آبی بوده باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{14}{31}$
 (۲) $\frac{16}{31}$
 (۳) $\frac{15}{31}$
 (۴) $\frac{13}{31}$

۳۴- فرض کنید A و B دو پیشامد مستقل و $P(A) = \frac{1}{3}$ و $P(B) = \frac{3}{4}$ باشد. مقدار احتمال شرطی A به شرط $A \cup B$ ،

کدام است؟

(۱) ۱

(۲) $\frac{1}{3}$

(۳) $\frac{2}{5}$

(۴) $\frac{1}{5}$

۳۵- فرض کنید پیشامدهای B_1, \dots, B_n توأمأً مجزا باشند و $B = \bigcup_{j=1}^n B_j$ ، اگر برای هر $j = 1, \dots, n$ داشته باشیم

$$P(B_j) > 0 \text{ و } P(A|B_j) = p, P(A|B) \text{، کدام است؟}$$

(۱) $P(A|B) = \min(1, np)$

(۲) $P(A|B) = p$

(۳) $P(A|B) = \frac{p}{n}$

(۴) $P(A|B) > p$

آنالیز حقیقی:

۳۶- در فضای اعداد حقیقی کدام گزینه درست است؟

(۱) هر مجموعه بورل F_σ یا G_δ است.

(۲) هر زیرمجموعه‌ای از مجموعه کانتور بورل است.

(۳) هر زیرمجموعه‌ای از مجموعه کانتور اندازه پذیر لبگ است.

(۴) σ جبر مجموعه‌های بورل شمارا است.

۳۷- فرض کنید (X, μ) یک فضای اندازه، μ^* اندازه خارجی متناظر با μ و $\{A_n\}$ دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های X

باشد. کدام گزینه درست است؟

(۱) $\mu^* \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i \right) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu^*(A_n)$

(۲) اگر برای هر n ، $A_n \subseteq A_{n+1}$ آنگاه $\mu^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(A_n)$

(۳) اگر مجموعه‌های A_n دوه‌دو مجزا باشند آنگاه $\mu^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$

(۴) اگر برای هر n ، $A_{n+1} \subseteq A_n$ و $\mu^*(A_1) < \infty$ آنگاه $\mu^* \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(A_n)$

۳۸- فرض کنید X یک فضای اندازه و f تابعی حقیقی بر X باشد. کدام گزینه اندازه‌پذیری f را نتیجه می‌دهد؟
(۱) e^f یا $\sqrt[3]{f}$ اندازه‌پذیر است.

(۲) به‌ازای هر عدد صحیح n ، مجموعه $f^{-1}((n, \infty))$ اندازه‌پذیر است.

(۳) به‌ازای هر مجموعه شمارای A در \mathbb{R} ، مجموعه $f^{-1}(A)$ اندازه‌پذیر است.

(۴) به‌ازای هر مجموعه متناهی A در \mathbb{R} ، مجموعه $f^{-1}(A)$ اندازه‌پذیر است.

۳۹- فرض کنید (X, μ) یک فضای اندازه متناهی و f یک تابع حقیقی اندازه‌پذیر بر X باشد. کدام گزینه درباره دوگزاره زیر درست است؟

(الف) $f \in L^1(\mu)$.

(ب) اگر $E_n = \{x \in X : |f(x)| > n\}$ آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} |f| d\mu = 0$.

(۱) (الف) و (ب) معادل هستند.

(۲) (الف) نتیجه می‌دهد (ب)، ولی لزوماً معادل نیستند.

(۳) (ب) نتیجه می‌دهد (الف)، ولی لزوماً معادل نیستند.

(۴) هیچ‌کدام دیگری را (در حالت کلی) نتیجه نمی‌دهد.

۴۰- فرض کنید μ اندازه‌ای روی \mathbb{N} باشد که به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $\mu(\{n\}) = \frac{1}{n}$. برای توابع $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ با

ضابطه‌های $f(n) = \frac{\sin n}{n}$ و $g(n) = \frac{(-1)^n}{\log n}$ در فضای اندازه (\mathbb{N}, μ) ، کدام گزینه درست است؟

(۱) g انتگرال‌پذیر است ولی f انتگرال‌پذیر نیست.

(۲) f انتگرال‌پذیر است ولی g انتگرال‌پذیر نیست.

(۳) f و g هر دو انتگرال‌پذیر هستند.

(۴) f و g هیچ‌کدام انتگرال‌پذیر نیستند.

۴۱- فرض کنید (X, μ) یک فضای اندازه و $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع حقیقی اندازه‌پذیر بر X باشد که در اندازه به تابع اندازه‌پذیر f بر X همگرا است. کدام گزینه نادرست است؟

(۱) اگر تابع f انتگرال‌پذیر باشد و برای هر n ، $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ (a.e.)، آنگاه $\int f_n \rightarrow \int f$.

(۲) اگر g تابعی انتگرال‌پذیر بر X باشد و برای هر n ، $|f_n| \leq g$ (a.e.)، آنگاه $\int f_n \rightarrow \int f$.

(۳) $f_n^2 \rightarrow f^2$ در اندازه و اگر توابع f_n و f انتگرال‌پذیر باشند آنگاه $\int f_n \rightarrow \int f$.

(۴) اگر برای هر n ، تابع f_n نامنفی و انتگرال‌پذیر باشد و تابع f نیز انتگرال‌پذیر باشد آنگاه $\int f d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu$.

۴۲- فرض کنید (X, μ) یک فضای اندازه متناهی، $1 < p, q < \infty$ ، $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ و M عددی ثابت است. اگر

$\{f_n\}$ دنباله‌ای در فضای $L^p(\mu)$ باشد و $f \in L^p(\mu)$ ، کدام گزینه نادرست است؟

(۱) اگر $f_n \rightarrow f$ در $L^p(\mu)$ و $\{g_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر باشد که برای هر n ، $|g_n| \leq M$ (a.e.) و $g_n \rightarrow g$ (a.e.) آنگاه $g_n f_n \rightarrow gf$ در $L^p(\mu)$.

(۲) اگر $f_n \rightarrow f$ (a.e.) و برای هر n ، $|f_n| \leq M$ (a.e.) آنگاه برای هر $g \in L^q(\mu)$ ، $\int f_n g \rightarrow \int fg$.

(۳) اگر $f_n \rightarrow f$ در $L^p(\mu)$ آنگاه برای هر $g \in L^q(\mu)$ ، $\int f_n g \rightarrow \int fg$.

(۴) اگر $\|f_n\|_p \rightarrow \|f\|_p$ آنگاه $f_n \rightarrow f$ در $L^p(\mu)$.

۴۳- فرض کنید μ یک اندازه بورل روی \mathbb{R} باشد که نسبت به انتقال پایا است. نگاشت T را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} T: L^1(\mu) \rightarrow \mathbb{R} \\ T(f) = \int_{[0,1]} xf \, d\mu \end{cases}$$

اگر $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $u(x) = x\chi_{[0,1]}(x)$ تعریف شود و $T(u) = 16$ ، آنگاه نرم عملگری T کدام است؟

۸ (۱)

۱۶ (۲)

۳۲ (۳)

۶۴ (۴)

۴۴- فرض کنید (X, μ) یک فضای اندازه، $1 \leq p < q \leq \infty$ و $Y \subseteq L^p(\mu) \cap L^q(\mu)$ یک زیرفضای بسته

از $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ و $(L^q(\mu), \|\cdot\|_q)$ باشد. کدام گزینه در مورد نگاشت همانی $I: (Y, \|\cdot\|_p) \rightarrow (Y, \|\cdot\|_q)$ درست است؟

(۱) I پیوسته است ولی لزوماً وارون آن پیوسته نیست.

(۲) I لزوماً پیوسته نیست ولی وارون آن پیوسته است.

(۳) در حالت کلی I و I^{-1} لزوماً پیوسته نیستند.

(۴) I همسان‌ریختی است.

۴۵- در فضای $L^1([-1, 1])$ ضرب درونی با ضابطه $(f, g) = \int_{[-1, 1]} f \bar{g} \, d\lambda$ تعریف می‌شود که λ اندازه لبگ است.

فرض کنید $\{f = 0\}$ تقریباً همه جا بر $[-1, 0]$ ، $M = \{f \in L^1([-1, 1]) : [-1, 0] \text{ تقریباً همه جا } f = 0\}$. کدام گزینه درباره دو گزاره زیر درست است؟

(الف) $M^\perp = M$

(ب) $L^1([-1, 1]) = M \oplus M^\perp$

(۲) (الف) درست است ولی (ب) درست نیست.

(۱) هر دو گزاره درست است.

(۴) هیچ‌کدام درست نیستند.

(۳) (ب) درست است ولی (الف) درست نیست.

جبر پیشرفته ۱:

۴۶- در مورد حلقه $\frac{\mathbb{Z}_p[x]}{\langle x^4 \rangle}$ کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) نوتری و آرتینی است.
 (۲) آرتینی است ولی نوتری نیست.
 (۳) نوتری است ولی آرتینی نیست.
 (۴) نه نوتری و نه آرتینی است.

۴۷- فرض کنید R یک حلقه تقسیم ناجابه جایی باشد. در این صورت کدام حکم در مورد حلقه ماتریسی $M_n(R)$ به عنوان R -مدول صحیح است؟

- (۱) نوتری است ولی اینژکتیو نیست.
 (۲) هم نوتری است و هم اینژکتیو
 (۳) نوتری نیست ولی اینژکتیو است.
 (۴) نه نوتری است و نه اینژکتیو

۴۸- فرض کنید R یک حلقه یکدار و E یک R -مدول اینژکتیو باشد. فرض کنیم $a \in R$ و $\varphi_a: E \rightarrow E$ با ضابطه $\varphi_a(x) = ax$ یک R -همریختی یک به یک باشد. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) φ_a همانی است.
 (۲) φ_a پوچ توان است.
 (۳) φ_a خودتوان است.
 (۴) φ_a یک R -یکریختی است.

۴۹- فرض کنیم $\mathbb{Z}_{(\Delta)} = \left\{ \frac{m}{k} \in \mathbb{Q} \mid (\Delta, k) = 1 \right\}$. اگر $R = \mathbb{Z}_{(\Delta)} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ آنگاه به ازای عدد طبیعی n ، رادیکال

جیکوبسن حلقه ماتریسی $M_n(R)$ با کدام گزینه یکریخت است؟

- (۱) \circ
 (۲) $M_n(1 \circ \mathbb{Z})$
 (۳) $M_n(\Delta \mathbb{Z}_{(\Delta)} \times 1 \circ \mathbb{Z})$
 (۴) $M_n(\Delta \mathbb{Z}_{(\Delta)} \times \Delta \mathbb{Z})$

۵۰- فرض کنید دنباله $\circ \rightarrow \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Q} \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow \circ$ یک دنباله دقیق کوتاه از \mathbb{Z} -مدولها باشد. یکریختی \mathbb{Z} -

مدولی در کدام گزینه، نادرست است؟

- (۱) $N \cong N \oplus \mathbb{Q}$
 (۲) $M \cong N \oplus \left(\prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Q} \right)$
 (۳) $M \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \cong M$
 (۴) $M \oplus \mathbb{Q} \cong N \oplus \left(\prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Q} \right)$

۵۱- اگر φ یک \mathbb{Z} -همریختی ناصفر و غیرهمانی از \mathbb{Z}_{p^∞} به خودش باشد، آنگاه کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) $\text{Im } \varphi$ متناهی مولد نیست ولی $\ker \varphi$ متناهی مولد است.
 (۲) $\text{Im } \varphi$ متناهی مولد است ولی $\ker \varphi$ متناهی مولد نیست.
 (۳) $\text{Im } \varphi$ و $\ker \varphi$ متناهی مولد نیستند.
 (۴) $\text{Im } \varphi$ و $\ker \varphi$ متناهی مولد هستند.

۵۲- فرض کنید R یک حلقه باشد. در این صورت $\text{Hom}_R(R[x], R)$ به عنوان \mathbb{Z} -مدول با کدام گزینه یکرخت است؟

(۱) R (۲) $R[x]$

(۳) $\{0\}$ (۴) $R[[x]]$ (حلقه سری‌های توانی)

۵۳- فرض کنید F_1 و F_2 دو R -مدول آزاد با پایه‌های متناهی باشند که در آن R حلقه‌ای جابه‌جایی است. در این صورت

$\text{End}_R(F_1) \otimes_R \text{End}_R(F_2)$ با کدام R -مدول یکرخت است؟

(۱) $F_1 \oplus F_2$ (۲) $\text{End}_R(F_1 \otimes_R F_2)$

(۳) $F_1 \otimes_R F_2$ (۴) $\text{End}_R(F_1 \oplus F_2)$

۵۴- فرض کنید F یک میدان و M یک $F[x]$ -مدول تصویری ناصفر باشد. در این صورت کدام گزینه در مورد M صحیح است؟

(۱) هم آزاد و هم اینژکتیو است. (۲) آزاد نیست ولی اینژکتیو هست.

(۳) آزاد است اما اینژکتیو نیست. (۴) نه آزاد و نه اینژکتیو است.

۵۵- حلقه جابه‌جایی و یک‌دار R مفروض است، به طوری که هر دو R -مدول غیرصفر شامل دو زیرمدول غیرصفر و یکرخت هستند. کدام گزینه لزوماً نادرست است؟

(۱) R فقط یک ایده‌آل ماکسیمال دارد. (۲) هر R -مدول متناهی مولد ساده است.

(۳) همه R -مدول‌های ساده یکرخت هستند. (۴) هر R -مدول غیرصفر شامل زیرمدولی ساده است.

بهبینه‌سازی خطی پیشرفته ۱:

۵۶- مسئله برنامه‌ریزی خطی اولیه را به صورت

$$\max z = c^T x$$

$$\text{s.t. } Ax \leq 0$$

در نظر بگیرید. می‌دانیم:

$$Ax \leq 0 \Rightarrow c^T x \leq 0.$$

گزینه درست کدام است؟

(۱) دستگاه $A^T v = c$ ناشدنی است. (۲) مسئله دوگان ناشدنی است.

(۳) $v \leq 0$ وجود دارد به طوری که $A^T v = c$. (۴) $v \geq 0$ وجود دارد به طوری که $A^T v = c$.

۵۷- فرض کنید $x \neq 0$ موجود است، به طوری که $Ax = b$ ، $x \geq 0$. کدام گزینه درست است؟

(۱) v وجود ندارد به طوری که $A^T v > 0$ و $v^T b = 0$.

(۲) v وجود ندارد به طوری که $A^T v = 0$ و $v^T b = 0$.

(۳) v وجود دارد به طوری که $A^T v = 0$ و $v^T b \neq 0$.

(۴) $A^T v > 0$ جواب ندارد.

۵۸- فرض کنید $c \geq 0$. مسئله اولیه (P) را به صورت

$$\max u = b^T v \quad (P)$$

$$\text{s.t.} \quad A^T v \leq c$$

و دوگان آن را (D) در نظر بگیرید. اگر (D) شدنی باشد، آنگاه

(۱) (P) جواب بهینه دارد. (۲) (P) می تواند بی کران باشد.

(۳) (D) می تواند بی کران باشد. (۴) (D) و (P) هر دو می توانند بی کران باشند.

۵۹- فرض کنید $\bar{w} = 0$ و $\bar{v} = 0$ برای مسئله اولیه به صورت

$$\min (b^T w + u^T v) \quad (P)$$

$$\text{s.t.} \quad A^T w + v \leq c$$

$$v \leq 0$$

شدنی و x^0 برای مسئله دوگان متناظر (D) شدنی هستند. کدام شرایط، بهینه بودن این نقاط را برای (P) و (D) تضمین می کنند؟ (فرض کنید a_j ها ستون های A هستند.)

$$x_j^0 = 0 \Rightarrow a_j^T \bar{w} = c_j, j = 1, \dots, n \quad (۱)$$

$$x_j^0 < u_j \Rightarrow a_j^T \bar{w} = c_j, j = 1, \dots, n \quad (۲)$$

$$x_j^0 > 0 \Rightarrow a_j^T \bar{w} = c_j, j = 1, \dots, n \quad (۳)$$

$$x_j^0 = u_j \Rightarrow a_j^T \bar{w} = c_j, j = 1, \dots, n \quad (۴)$$

۶۰- فرض کنید مسئله (P) به صورت

$$\max w = c^T x \quad (P)$$

$$\text{s.t.} \quad Ax = b$$

جواب بهینه x^0 دارد. دوگان (P) را (D) بنامید. قید جدید به صورت $g^T x = b_0$ را به مسئله (P) اضافه کنید و

مسئله جدید را (P') و دوگان آن را (D') بنامید. اگر $g^T x^0 \neq b_0$ ، آنگاه کدام گزینه درست است؟

(۱) (D') نمی تواند ناشدنی باشد. (۲) (P') نمی تواند بی کران باشد.

(۳) (D') نمی تواند بی کران باشد. (۴) (P') می تواند بی کران باشد.

۶۱- مسئله اولیه (P) را به صورت

$$\min z = c^T x \quad (P)$$

$$\text{s.t.} \quad Ax = b$$

$$0 \leq x \leq u$$

در نظر بگیرید و دوگان آن را (D) بنامید. کدام گزینه برای (D) درست است؟

(۱) همواره شدنی است. (۲) می تواند ناشدنی باشد.

(۳) همواره جواب بهینه دارد. (۴) نمی تواند بی کران باشد.

۶۲- فرض کنید $u \geq 0$ وجود دارد، به طوری که $A^T u = c$. در این صورت، به ازای هر x به طوری که $Ax \leq 0$ ، کدام مورد

درست است؟

$$c^T x \geq 0 \quad (۱)$$

$$c^T x \leq 0 \quad (۲)$$

$$c^T x = 0 \quad (۳)$$

$$c^T x \quad \text{می تواند صفر، منفی یا مثبت باشد.} \quad (۴)$$

- ۶۳- در یک مسئله جریان ماکسیمال در شبکه، تنها یک برش با ظرفیت متناهی برابر با k وجود دارد و بقیه برش‌ها ظرفیت نامتناهی دارند. در این صورت، کدام گزینه برای مقدار جریان ماکسیمال در شبکه درست است؟
- (۱) می‌تواند یک مقدار متناهی بیشتر از k باشد. (۲) می‌تواند بی‌کران باشد.
- (۳) می‌تواند کمتر از k باشد. (۴) برابر k است.
- ۶۴- مسئله برنامه‌ریزی خطی به صورت

$$\min T = \sum_{i=1}^m y_i \quad (P)$$

$$\text{s.t.} \quad Ax + y = b$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

را در نظر بگیرید که در آن، $b \geq 0$ و y_i ها درایه‌های y هستند. کدام گزینه در مورد (P) درست است؟

(۱) اگر جواب بهینه داشته باشد، آنگاه دستگاه $Ax = b$ جواب دارد.

(۲) شدنی است و می‌تواند بی‌کران باشد.

(۳) می‌تواند ناشدنی باشد.

(۴) جواب بهینه دارد.

۶۵- مسئله (P) را به صورت

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

s.t.

$$(1) \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, i = 1, \dots, n \quad (P)$$

$$(2) \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, j = 1, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, i, j = 1, \dots, n$$

در نظر بگیرید و دوگان آن را (D) بنامید. متغیر دوگان مربوط به قید i ام در (۱) را u_i و متغیر دوگان مربوط به قید

j ام در (۲) را v_j بگیرید. نقاط شدنی x و (u, v) به ترتیب برای (P) و (D) نقاطی بهینه هستند اگر

(۱) به ازای هر i, j : $x_{ij} = 0 \Rightarrow u_i + v_j = c_{ij}$. (۲) $u_i + v_j \leq c_{ij}$ به ازای هر i و j به طوری که $x_{ij} \neq 0$.

(۳) $(u_i + v_j = c_{ij})$ یا $(x_{ij} = 0)$ به ازای هر i و j . (۴) به ازای هر i, j : $x_{ij} = 0 \Rightarrow u_i + v_j = c_{ij}$.

اصول آموزش ریاضی:

۶۶- کدام نظریه پرداز، در دهه ۸۰ میلادی با طرح دو مؤلفه «فرهنگ» و «ارزش‌ها»، گزاره «ریاضی یک زبان بین‌المللی

است.» را به چالش کشید و باعث تحولی عظیم در پژوهش‌های آموزش ریاضی شد؟

(۱) آلن بیشاپ (۲) دی‌آمبروسو (۳) آلن شونفیلد (۴) هیمن بس

- ۶۷- نظریه پیونددهنده بین «ریاضی، فرهنگ، اجتماع». کدام است؟
 (۱) آموزش ریاضی (۲) تاریخ ریاضی (۳) فلسفه ریاضی (۴) ریاضیات قومی
- ۶۸- از زمان تأسیس نظام‌های آموزش عمومی در جهان، اصلی‌ترین عامل تغییر در برنامه‌های درسی ریاضی، چه بوده‌است؟
 (۱) سیاست (۲) نتایج ارزیابی‌های بین‌المللی ریاضی
 (۳) ظهور نظریه‌های نوین روان‌شناسی (۴) تغییرات جمعیتی
- ۶۹- چهار حوزه تشکیل‌دهنده مدل چهاروجهی هیگنسون (۱۹۸۰) برای آموزش ریاضی، کدامند؟
 (۱) جامعه‌شناسی، تدریس، ریاضی، روان‌شناسی (۲) فلسفه، ریاضی، تکنولوژی، روان‌شناسی
 (۳) ریاضی، فلسفه، روان‌شناسی، جامعه‌شناسی (۴) فلسفه، قوم‌شناسی، روان‌شناسی، ریاضی
- ۷۰- از نظر ریچارد اسکمپ، دو مؤلفه اصلی نظریه «یادگیری هوشمند» در آموزش ریاضی، کدامند؟
 (۱) فهم رابطه‌ای و فهم طوطی‌وار (۲) فهم ابزاری و فهم رابطه‌ای
 (۳) فهم روبه‌ای و فهم معنادار (۴) فهم عمیق و فهم کاربردی قواعد
- ۷۱- در رویکرد «آموزش ریاضیات واقعیت‌مدار» (RME)، ریاضی چگونه تبیین شده‌است؟
 (۱) ریاضی دانشی قطعی است. (۲) ریاضی مستقل از زمینه دنیای واقعی است.
 (۳) ریاضی دانش پیشینی است. (۴) ریاضی یک فعالیت انسانی است.
- ۷۲- بزرگ‌ترین گردهمایی آموزشگران ریاضی در جهان، کدام است؟
 (۱) کنگره بین‌المللی ریاضی‌دان‌ها (ICM)
 (۲) کنگره بین‌المللی آموزش ریاضی (ICME)
 (۳) کنگره اروپایی پژوهش در آموزش ریاضی (CERME)
 (۴) کنفرانس بین‌المللی روان‌شناسی آموزش ریاضی (PME)
- ۷۳- برنامه درسی «دوران ریاضی جدید» (New Math Era)، بر چه ریاضیاتی استوار است؟
 (۱) نظریه مجموعه‌ها
 (۲) ریاضیات اصل موضوعی
 (۳) ساختارهای ریاضی به سبک گروه بورباکی
 (۴) نظریه مجموعه‌ها، منطق صوری و تابع به‌عنوان مفهوم هماهنگ‌کننده
- ۷۴- برنامه درسی ریاضی «mathematics» و «Mathematics» به ترتیب برای کدام است؟
 (۱) دوره ابتدایی - دوره متوسطه (۲) ورود به دانشگاه - حرفه‌آموزی
 (۳) تربیت متخصص - تربیت شهروند (۴) همه دانش‌آموزان - دانش‌آموزان نخبه
- ۷۵- ماهیت «اصول آموزش ریاضی» چیست؟
 (۱) نسبی (۲) قطعی (۳) انتزاعی (۴) کاربردی